Нестационарное граничное управление вынужденных колебаний струны первыми косыми производными за произвольное время
Ф. Е. Ломовцев (Минск, Беларусь)

Для произвольного финального момента $t = T > 0$ колеблющуюся струну

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ \{x,t\} \in Q_T = [0,2] \times [0,T], \tag{1}$$

из произвольно заданного начального состояния

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in [0,2], \tag{2}$$

с помощью выбора значений μ_i, $i = 1,\, 2$, граничного режима

$$[\alpha_i(t)u_t + \beta_i(t)u_x + \gamma_i(t)\,u]|_{x=2(i-1)} = \mu_i(t),\ t \in [0,T],\ i = 1,\, 2, \tag{3}$$

привести в произвольно заданное финальное состояние

$$u|_{t=T} = \widehat{\varphi}(x),\ u_t|_{t=T} = \widehat{\psi}(x),\ x \in [0,2]. \tag{4}$$

Задача управления (1)–(4) решена во множестве классических решений $u \in C^2(Q_T)$, для которых из (1)–(4) следуют необходимые требования гладкости

$$f \in C(Q_T),\ \varphi,\ \widehat{\varphi} \in C^2[0,2],\ \psi,\ \widehat{\psi} \in C^1[0,2],\ \mu_i \in C^1[0,T],\ i = 1,2, \tag{5}$$

$$\int_{k-1}^{t} f(|2 - |2 - x \pm (t-\tau)||, \tau)\, d\tau \in C^1(Q^{(k)} \cap Q_T),\ k = 1,\, 2, ...,\, n, \tag{6}$$

где $Q^{(k)} = [0,2] \times [k-1,k]$. Необходимость требования (6) указана в [1]. Из режима (3) и его первой производной по t при $t = 0$, $t = T$ в силу (1) при $t = 0$, $t = T$ и (2), (4) при $x = 0$, $x = 2$ выводим необходимые условия согласования

$$\alpha_i(0)\psi(2i-2) + \beta_i(0)\varphi'(2i-2) + \gamma_i(0)\varphi(2i-2) = \mu_i(0),$$

$$\alpha_i(0)[\varphi''(2i-2) + f(2i-2,0)] + [\alpha'_i(0) + \gamma_i(0)]\psi(2i-2)+$$

$$+\beta_i(0)\psi'(2i-2) + \beta'_i(0)\varphi'(2i-2) + \gamma'_i(0)\varphi(2i-2) = \mu'_i(0),\ i = 1,\, 2. \tag{7}$$

$$\alpha_i(T)\widehat{\psi}(2i-2) + \beta_i(T)\widehat{\varphi}'(2i-2) + \gamma_i(T)\widehat{\varphi}(2i-2) = \mu_i(T),$$

$$\alpha_i(T)[\widehat{\varphi}''(2i-2) + f(2i-2,T)] + [\alpha'_i(T) + \gamma_i(T)]\widehat{\psi}(2i-2)+$$

$$+\beta_i(T)\widehat{\psi}'(2i-2) + \beta'_i(T)\widehat{\varphi}'(2i-2) + \gamma'_i(T)\widehat{\varphi}(2i-2) = \mu'_i(T),\ i = 1,\, 2. \tag{8}$$

Теорема. *Пусть* $n - 1 < T \le n$, $n = 1, 2, ...$, $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i \in C^1[0,T]$, $\alpha_i(t) \ne (-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $t \in [0,T]$, $i = 1,\, 2$. *Если функции* f, φ, ψ, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$ *удовлетворяют условиям гладкости (5) и (6), согласования (7) и (8) и управляемости:*

$$\varphi_n(x + T_n) + \varphi_n(0) + \int_0^{x+T_n} \psi_n(s)ds + \int_0^{T_n} \int_\tau^{x+T_n-\tau} f(s, n-1+\tau)\, ds\, d\tau -$$

$$-\widehat{\varphi}(x)-\widehat{\varphi}(T_n)-\int_{T_n}^{x}\widehat{\psi}(s)ds=0,\ x\in[0,T_n[,\ T_n=T-n+1,\ n=1,\,2,\ldots, \qquad (9)$$

$$\varphi_n(2)+\varphi_n(x-T_n)+\int_{x-T_n}^{2}\psi_n(s)ds+\int_0^{T_n}\int_{\tau}^{2-x+T_n-\tau}f(2-s,n-1+\tau)\,ds\,d\tau-$$

$$-\widehat{\varphi}(2-T_n)-\widehat{\varphi}(x)-\int_x^{2-T_n}\widehat{\psi}(s)ds=0,\ x\in]2-T_n,2],\ n=1,\,2\ \ldots, \qquad (10)$$

при $T_n<1$ *для* $x\in[T_n,2-T_n]$ *ещё условиям управляемости*

$$\varphi'_n(x+T_n)+\psi_n(x+T_n)+\int_0^{T_n}f(x+T_n-\tau,n-1+\tau)d\tau=\widehat{\varphi}\,'(x)+\widehat{\psi}(x),$$

$$\varphi'_n(x-T_n)-\psi_n(x-T_n)-\int_0^{T_n}f(x-T_n+\tau,n-1+\tau)d\tau=\widehat{\varphi}\,'(x)-\widehat{\psi}(x), \quad (11)$$

или при $T_n=1$ *вместо условий (11) для* $x=1$ *ещё условиям управляемости*

$$\varphi_n(2)+\varphi_n(0)+\int_0^2\psi_n(s)ds+\int_0^1\int_{\tau}^{2-\tau}f(s,n-1+\tau)\,ds\,d\tau=2\widehat{\varphi}(1),\varphi'_n(2)-\varphi'_n(0)+$$

$$+\varphi'_n(2)-\varphi'_n(0)+\psi_n(2)+\psi_n(0)+\int_0^1[f(2-\tau,n-1+\tau)+f(\tau,n-1+\tau)]d\tau=2\widehat{\psi}(1), \quad (12)$$

то существуют управления $\mu_1,\,\mu_2\in C^1[0,T]$ *задачи граничного управления (1)–(4). Для всех* $f,\,\varphi,\,\psi,\,\widehat{\varphi},\,\widehat{\psi}$, *удовлетворяющих соотношениям (5)–(12), и всех* $t\in[n-1,T]$ *единственны управления* $\mu_i(t)=\widehat{\eta}_i(t)$, *и всех* $t\in[0,n-1[$ *управления* $\mu_i(t)=\breve{\eta}_i(t)$ *– любые функции множества* $C^1[0,n-1]$, *для которых выполняются условия (7) – (12) и* $\widehat{\eta}_i(n-1)=\breve{\eta}_i(n-1)$, $\widehat{\eta}_i\,'(n-1)=\breve{\eta}_i\,'(n-1)$, $i=1,\,2$, $n=1,\,2,\,\ldots$ *Требования гладкости (5), (6), условия согласования (7), (8) и условия управляемости (9)–(12) являются необходимыми и достаточными для однозначной разрешимости при* $n=1$ *и неоднозначной разрешимости при* $n>1$ *задачи управления (1)–(4) во множестве классических решений.*

Схема доказательства. Используются явные рекуррентные формулы единственных классических решений смешанной задачи (1)–(3) из [1], которые выводятся новым методом "сечения и сшивания вдоль характеристик", предложенным автором в [2]. Этот метод решения не требует продолжения исходных данных $f,\,\varphi,\,\psi,\,\mu_1,\,\mu_2$ этой задачи вне множества её задания Q_T.

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е., Новиков Е.Н.* Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в нестационарных граничных условиях. *Материалы Междунар. конф. ВЗМШ "Современные методы теории функций и смежные проблемы", (27 янв.- 2 февр. 2015 г., Воронеж, Россия).* Воронеж: Издательский дом ВГУ. (2015), 73-76.

2. *Ломовцев Ф.Е., Новиков Е.Н.* Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях. *Дифференц. уравнения.* Т. 50, No. 1. (2014), 126-129.